Uma demonstração de (2.6) é:

1	$t_1 = t_2$	premissa
2	$t_1 = t_1$	$=$i
3	$t_2 = t_1$	$=$e $1, 2$

onde ϕ é $x = t_1$. Uma demonstração de (2.7) é:

1	$t_2 = t_3$	premissa
2	$t_1 = t_2$	premissa
3	$t_1 = t_3$	$=$e $1, 2$

onde ϕ é $t_1 = x$, de modo que na linha 2 temos $\phi[t_2/x]$ e na linha 3 obtemos $\phi[t_3/x]$, como dado pela regra =e aplicada às linhas 1 e 2. Note como aplicamos a regra =e em diversos casos diferentes.

Nossa discussão das regras =i e =e mostrou que elas fazem com que a igualdade seja *reflexiva* (2.5), *simétrica* (2.6) e *transitiva* (2.7). Essas são condições necessárias mínimas para qualquer conceito razoável de igualdade. Vamos deixar o tópico de igualdade por enquanto e seguir para as regras de demonstração para os quantificadores.

Regras de demonstração para o quantificador universal A regra para eliminar $\forall$ é a seguinte:

$$\frac{\forall x\, \phi}{\phi[t/x]}\ \forall x\,\mathrm{e}.$$

Ela diz o seguinte: se $\forall x\ \phi$ é verdade, então você pode substituir x em ϕ por qualquer termo t (supondo, como de hábito, a condição em paralelo de que t é livre para x em ϕ) e concluir que $\phi[t/x]$ também é verdade. É evidente, intuitivamente, que essa regra está correta.

Lembre-se de que $\phi[t/x]$ é obtida substituindo-se todas as ocorrências livres de x em ϕ por t. Você pode considerar o termo t como sendo um exemplo *concreto* de x. Como se supõe que ϕ é verdadeira para todo x, isso também tem que ocorrer para qualquer termo t.

Exemplo 2.11 Para ver a necessidade da condição em paralelo de que t seja livre para x em ϕ, considere o caso em que ϕ é $\exists y(x < y)$ e o termo que irá substituir x é y. Suponha que estamos falando de números com a relação usual 'menor do que'. A afirmação $\forall x\phi$ diz que qualquer que seja o número n existe algum número maior m, o que é, de fato, verdade para números inteiros ou reais. No entanto, $\phi[y/x]$ é a fórmula $\exists y(y < y)$, que diz que existe um número que é maior do que ele mesmo. Isso está errado; e não podemos permitir que uma regra de demonstração deduza coisas semanticamente erradas de outras semanticamente válidas. É claro que o que deu errado foi o fato de y ter-se tornado preso no processo de substituição; y não é livre para x em ϕ. Assim, para ir de $\forall x\phi$ a $\phi[t/x]$, a condição em paralelo de que t seja livre para x em ϕ tem que ser satisfeita: use uma outra variável diferente de y para ϕ, por exemplo $\exists z(x < z)$ e depois aplique $[y/x]$ a essa nova fórmula, obtendo $\exists z(y < z)$.

A regra $\forall x$ i é um pouco mais complicada. Ela usa uma caixa de demonstração semelhante às que vimos na dedução natural para a lógica proposicional, mas dessa vez a caixa marca o escopo da 'variável temporária' x_0, em vez do escopo de uma hipótese. A regra $\forall x$ i escreve-se como

$$\frac{\boxed{\begin{array}{l} x_0 \\ \quad \vdots \\ \quad \phi[x_0/x] \end{array}}}{\forall x\, \phi}\ \forall x\,\mathrm{i}.$$

Ela diz: se, começando com uma variável 'nova' x_0, você for capaz de provar alguma fórmula $\phi[x_0/x]$ com x_0, então (*já que* x_0 *é nova*) você pode deduzir $\forall x\ \phi$. O ponto importante é que x_0 é uma variável nova que não aparece em *nenhum lugar fora da caixa*; ela é um termo *arbitrário*. Como não supusemos nada sobre x_0, qualquer elemento poderia ser usado em seu lugar; daí a conclusão $\forall x \phi$.

Leva algum tempo para se compreender essa regra, já que ela parece estar indo de um caso particular de ϕ para o caso geral $\forall x\ \phi$. A condição em paralelo, de que x_0 não aparece fora da caixa, é que nos permite fazer isso.

Para compreender isso, pense na seguinte analogia. Se você quiser provar a alguém que você pode, por exemplo, rasgar uma bola de tênis apertando-a em sua mão, você poderia dizer: 'pode me dar uma bola de tênis que eu a rasgo'. Então lhe damos uma bola de tênis e você a rasga. Mas como ter certeza de que você poderia rasgar *qualquer* bola de tênis dessa forma? É claro que não podemos dar *todas elas*, então como podemos ter certeza de que você poderia rasgar qualquer uma das bolas? Bem, supomos que a que você rasgou era uma bola arbitrária, ou 'aleatória', isto é, não havia nada de especial nela — como uma bola que você tenha 'preparado' antes; e isso é suficiente para nos convencer de que você poderia rasgar *qualquer* bola de tênis. Nossa regra diz que se você pode provar ϕ para um x_0 que nada tem de especial, então você pode provar ϕ para qualquer x.

Colocando de outra maneira, a passagem de ϕ para $\forall x \phi$ só é legítima se chegarmos a ϕ de tal modo que nenhuma de suas hipóteses contenha x como uma variável livre. Qualquer hipótese que tenha x como variável livre coloca restrições sobre esse x. Por exemplo, a hipótese ave(x) confina x ao universo das aves, e qualquer coisa que pudermos demonstrar sobre x usando essa fórmula será uma afirmação restrita às aves, e não sobre qualquer coisa que quisermos.

Já está na hora de vermos um exemplo de como essas regras de demonstração funcionam. Eis uma demonstração do argumento $\forall x(P(x) \to Q(x))$, $\forall x\, P(x) \vdash \forall x\ Q(x)$:

1		$\forall x\,(P(x) \to Q(x))$	premissa
2		$\forall x\, P(x)$	premissa
3	x_0	$P(x_0) \to Q(x_0)$	$\forall x$ e 1
4		$P(x_0)$	$\forall x$ e 2
5		$Q(x_0)$	$\to$e 3, 4
6		$\forall x\, Q(x)$	$\forall x$ i 3–5

A estrutura dessa demonstração é guiada pelo fato de que a conclusão é uma fórmula contendo $\forall$. Para chegar a ela, precisaremos de uma aplicação de $\forall x$ i, de modo que colocamos uma caixa para controlar o escopo de x_0. O resto agora é automático: demonstramos $\forall x\ Q(x)$ provando $Q(x_0)$; mas este último pode ser demonstrado assim que pudermos provar $P(x_0)$ e $P(x_0) \to Q(x_0)$, que são casos particulares das premissas (obtidas usando-se $\forall x$ e com o termo x_0). Note que escrevemos o nome da variável temporária à esquerda da primeira linha de demonstração em sua caixa de escopo.

Eis um exemplo mais simples que usa apenas $\forall x$ e: vamos mostrar a validade do argumento $P(t)$, $\forall x(P(x) \to \neg Q(x)) \vdash \neg Q(t)$ para qualquer termo t:

1	$P(t)$	premissa
2	$\forall x\,(P(x) \to \neg Q(x))$	premissa
3	$P(t) \to \neg Q(t)$	$\forall x$ e 2
4	$\neg Q(t)$	$\to$e 3, 1

Note que invocamos $\forall x$ e usando o mesmo t da premissa $P(t)$. Se tivéssemos invocado $\forall x$ e com y, por exemplo, teríamos obtido $P(y) \to \neg Q(y)$, que seria verdadeira, mas não adiantaria nada se y fosse diferente de t. Assim, $\forall x$ e é, de fato, um *esquema* de regras, uma para cada termo t (livre para x em ϕ), e devemos fazer nossa escolha de modo a obter padrões consistentes. Além disso, note que temos regras $\forall x$ i e $\forall x$ e *para cada variável* x. Em particular, temos regras $\forall y$ i, $\forall y$ e, e assim por diante. Escreveremos $\forall$i e $\forall$e ao falarmos sobre essas regras sem nos preocuparmos com a variável particular do quantificador.

Note também que embora os colchetes representando as substituições apareçam nas regras $\forall$i e $\forall$e, eles não aparecem quando usamos essas regras. A razão é que fazemos de fato as substituições pedidas. Nas regras, a expressão $\phi[t/x]$ significa: 'ϕ, mas com as ocorrências livres de x substituídas por t'. Assim, se ϕ é $P(x, y) \to Q(y, z)$ e a regra se refere a $\phi[a/y]$, fazemos a substituição e escrevemos $P(x, a) \to Q(a, z)$ na demonstração.

A compreensão das regras para o quantificador universal pode ser auxiliada pela comparação com as regras para $\wedge$. De certa forma, as regras para $\forall$ são generalizações daquelas para $\wedge$: enquanto $\wedge$ junta apenas dois fatores, $\forall$ age como juntando um montão de fórmulas (uma para cada substituição de suas variáveis). Assim, enquanto $\wedge$i tem duas premissas, $\forall x$ i tem uma premissa $\phi[x_0/x]$ para cada 'valor' possível de x_0. De maneira semelhante, onde a eliminação da conjunção permite que você deduza de $\phi \wedge \psi$ qualquer das duas que queira, ϕ ou ψ, a eliminação do quantificador universal permite que você deduza de $\forall x\phi$ a fórmula $\phi[t/x]$ para qualquer t que queira (desde que satisfaça a condição em paralelo). Dizendo a mesma coisa de outra maneira: pense em $\forall x$ i como dizendo que, para demonstrar $\forall x\phi$, você tem que provar $\phi[x_0/x]$ para todo valor possível de x_0; enquanto isso, $\wedge$i diz que, para demonstrar $\phi_1 \wedge \phi_2$, você tem que provar ϕ_i para todo $i = 1,2$.

Regras de demonstração para o quantificador existencial A analogia entre $\forall$ e $\wedge$ se estende também para $\exists$ e $\vee$; você até poderia tentar adivinhar as regras para $\exists$ começando com as regras para $\vee$ e aplicando as mesmas idéias que as que relacionam $\forall$ e $\wedge$. Por exemplo, vimos que as regras para a introdução da disjunção eram um tipo de duais às da eliminação da conjunção; para enfatizar esse ponto, poderíamos escrevê-las como

$$\frac{\phi_1 \wedge \phi_2}{\phi_k}\,\wedge\mathrm{e}_k \qquad \frac{\phi_k}{\phi_1 \vee \phi_2}\,\vee\mathrm{i}_k$$

onde k pode ser escolhido como 1 ou 2. Portanto, dada a forma da eliminação do quantificador universal, podemos inferir que a introdução do quantificador existencial deve ser, simplesmente,

$$\frac{\phi[t/x]}{\exists x\phi}\,\exists x\,\mathrm{i}.$$

De fato, isso está correto e diz, simplesmente, que podemos deduzir $\exists x\ \phi$ sempre que tivermos $\phi[t/x]$ para algum termo t (naturalmente, impomos a condição em paralelo de que t seja livre para x em ϕ).

Na regra $\exists$i, vemos que a fórmula $\phi[t/x]$ contém, de um ponto de vista computacional, mais informação do que $\exists x\phi$. Esta última só diz que ϕ é verdadeira para algum valor não especificado de x, enquanto $\phi[t/x]$ tem um exemplo t a sua disposição. Lembre-se de que a notação com colchetes nos pede para efetuar a substituição. No entanto, a notação $\phi[t/x]$ engana um pouco, pois sugere não somente o exemplo correto t, mas também a fórmula ϕ propriamente dita. Considere a situação na qual t é igual a y onde $\phi[y/x]$ é $y = y$. Então, você pode verificar por você mesmo que ϕ poderia ser um monte de coisas, como $x = x$ ou $x = y$. Assim, $\exists x\phi$ vai depender de qual desses ϕ você tinha em mente.

Estendendo a analogia entre $\exists$ e $\vee$, a regra $\vee$e nos leva à seguinte formulação de $\exists$e:

$$\frac{\exists x\,\phi \qquad \boxed{\begin{array}{l} x_0\ \phi[x_0/x] \\ \qquad \vdots \\ \qquad \chi \end{array}}}{\chi}\ \exists\text{e}.$$

Como $\vee$e, isso envolve uma análise de casos. O raciocínio é o seguinte: sabemos que $\exists x\,\phi$ é verdade, logo ϕ é verdade para pelo menos um 'valor' de x. Então fazemos uma análise de casos sobre todos os valores possíveis, escrevendo x_0 como um valor genérico representando todos eles. Se supor $\phi[x_0/x]$ nos permite demonstrar algum χ que não menciona x_0, então esse χ tem que ser verdade qualquer que seja o x_0 que torna $\phi[x_0/x]$ verdade. E isso é precisamente o que a regra $\exists$e nos permite deduzir. É claro que temos que impor a condição em paralelo de que x_0 não pode ocorrer fora de sua caixa (portanto, em particular, não pode ocorrer em χ). A caixa está controlando duas coisas: o escopo de x_0 e também o escopo da hipótese $\phi[x_0/x]$.

Da mesma forma que ao usar $\phi_1 \vee \phi_2$ você tem que estar preparado para que qualquer um dos ϕ_i seja verdadeiro, $\exists$e diz que ao usar $\exists x\,\phi$ você tem que estar preparado para qualquer valor possível $\phi[x_0/x]$. Outra maneira de pensar sobre $\exists$e é a seguinte: se você sabe que $\exists x\,\phi$ é verdade e você pode deduzir algum χ de $\phi[x_0/x]$, isto é, dando um nome ao elemento que você sabe que existe, então você pode deduzir χ mesmo sem dar nome ao elemento (desde que χ não se refira ao nome x_0).

A regra $\exists x$ e também é semelhante a $\vee$e no sentido de que ambas são regras de eliminação que não têm que concluir uma *subfórmula* da fórmula que estão a ponto de eliminar. Por favor, verifique que todas as outras regras de eliminação introduzidas até agora têm essa *propriedade de subfórmula*[2]. Essa propriedade é computacionalmente muito agradável, pois nos permite diminuir drasticamente o espaço de busca para uma demonstração. Infelizmente, $\exists x$ e, como seu primo $\vee$e, não é desse tipo benigno computacionalmente.

Vamos praticar essas regras em um par de exemplos. Certamente deveríamos ser capazes de provar a validade do argumento $\forall x\phi \vdash \exists x\phi$. A demonstração

1	$\forall x\,\phi$	premissa
2	$\phi[x/x]$	$\forall x$ e 1
3	$\exists x\,\phi$	$\exists x$ i 2

prova isso, onde escolhemos t para ser x em relação a ambos, $\forall x$ e e a $\exists x$ i (e note que x é livre para x em ϕ e que $\phi[x/x]$ é simplesmente ϕ de novo).

Demonstrar a validade do argumento $\forall x(P(x) \to Q(x)),\ \exists x\,P(x) \vdash \exists x\,Q(x)$ é mais complicado:

[2]Para $\forall x$ e, fazemos uma substituição $[t/x]$, mas ela preserva a estrutura lógica de ϕ.

1		$\forall x\,(P(x) \to Q(x))$	premissa
2		$\exists x\, P(x)$	premissa
3	x_0	$P(x_0)$	hipótese
4		$P(x_0) \to Q(x_0)$	$\forall x$ e 1
5		$Q(x_0)$	$\to$e 4, 3
6		$\exists x\, Q(x)$	$\exists x$ i 5
7		$\exists x\, Q(x)$	$\exists x$ e 2, 3–6

A motivação para a introdução da caixa na linha 3 dessa demonstração é o quantificador existencial na premissa $\exists x\ P(x)$ que tem que ser eliminada. Note que o $\exists$ na conclusão tem que ser introduzido *dentro da caixa*, e observe a associação entre esses dois passos. A fórmula $\exists x$ $Q(x)$ na linha 6 é o caso particular de χ na regra $\exists$e, e não contém nenhuma ocorrência de x_0, logo pode sair da caixa para a linha 7. A 'demonstração' quase idêntica

1		$\forall x\,(P(x) \to Q(x))$	premissa
2		$\exists x\, P(x)$	premissa
3	x_0	$P(x_0)$	hipótese
4		$P(x_0) \to Q(x_0)$	$\forall x$ e 1
5		$Q(x_0)$	$\to$e 4, 3
6		$Q(x_0)$	$\exists x$ e 2, 3–5
7		$\exists x\, Q(x)$	$\exists x$ i 6

não está correta! A linha 6 permite que o parâmetro novo x_0 saia da caixa do escopo que o declara. Isso não é permitido, e veremos mais adiante um exemplo em que tal uso ilícito de regras de demonstração leva a argumentos incorretos.

Um argumento com uma demonstração ligeiramente mais complexa é

$$\forall x\,(Q(x) \to R(x)),\ \exists x\,(P(x) \land Q(x)) \ \vdash\ \exists x\,(P(x) \land R(x))$$

e poderia modelar algum argumento verbal do tipo

> *Se todos os quacres são reformistas e se existe um protestante que também é um quacre, então tem que existir um protestante que também é reformista.*

Uma estratégia de demonstração possível é supor $P(x_0) \land Q(x_0)$, obter o caso particular $Q(x_0) \to R(x_0)$ a partir de $\forall x(Q(x) \to R(x))$ e usar $\land e_2$ para colocar nossas mãos em $Q(x_0)$, o que nos dá $R(x_0)$ via $\to$e...:

1		$\forall x\,(Q(x) \to R(x))$	premissa
2		$\exists x\,(P(x) \land Q(x))$	premissa
3	x_0	$P(x_0) \land Q(x_0)$	hipótese
4		$Q(x_0) \to R(x_0)$	$\forall x$ e 1
5		$Q(x_0)$	$\land e_2$ 3
6		$R(x_0)$	$\to$e 4, 5
7		$P(x_0)$	$\land e_1$ 3
8		$P(x_0) \land R(x_0)$	$\land$i 7, 6
9		$\exists x\,(P(x) \land R(x))$	$\exists x$ i 8
10		$\exists x\,(P(x) \land R(x))$	$\exists x$ e 2, 3–9

Note a estratégia dessa demonstração: listamos as duas premissas; a segunda premissa só pode ser usada se aplicarmos $\exists x$ e a ela. Isso faz com que coloquemos a caixa de demonstração nas linhas 3–9, assim como o novo nome de parâmetro x_0. Como queremos provar que $\exists x\,(P(x) \wedge R(x))$, essa fórmula tem que ser a última na caixa (nosso objetivo) e o resto envolve $\forall x$ e e $\exists x$ i.

Ambas as regras, $\forall$i e $\exists$e, têm a condição em paralelo de que a nova variável não pode ocorrer fora da caixa na regra. É claro que essas regras ainda podem ficar umas dentro das outras, escolhendo um nome diferente (y_0, por exemplo) para a nova variável. Por exemplo, considere o argumento $\exists x\, P(x)$, $\forall x \forall y (P(x) \to Q(y)) \vdash \forall y\; Q(y)$. (Olhe como é forte a segunda premissa: dados x, y arbitrários, se $P(x)$, então $Q(y)$. Isso significa que, se existe algum objeto com a propriedade P, então todos os objetos têm a propriedade Q.) Sua demonstração é a seguinte: pegamos um y_0 arbitrário e demonstramos $Q(y_0)$; fazemos isso observando que, como algum x satisfaz P, então qualquer y satisfaz Q:

1		$\exists x\, P(x)$	premissa
2		$\forall x \forall y\, (P(x) \to Q(y))$	premissa
3	y_0		
4	x_0	$P(x_0)$	hipótese
5		$\forall y\, (P(x_0) \to Q(y))$	$\forall x$ e 2
6		$P(x_0) \to Q(y_0)$	$\forall y$ e 5
7		$Q(y_0)$	$\to$e 6, 4
8		$Q(y_0)$	$\exists x$ e 1, 4–7
9		$\forall y\, Q(y)$	$\forall y$ i 3–8

Não existe nenhuma razão especial para escolher o nome x_0 como o da nova variável que usamos para $\forall x$ e $\exists x$ e y_0 como o nome para $\forall y$ e $\exists y$. Só fazemos isso porque fica mais fácil para nós, humanos. Novamente, estudamos a estratégia dessa demonstração. Temos que mostrar uma fórmula $\forall y$, o que nos obriga a usar $\forall y$ i, isto é, precisamos abrir uma caixa de demonstração (linhas 3-8) cujo objetivo é demonstrar um caso particular genérico $Q(y_0)$. Dentro dessa caixa queremos usar a premissa $\exists x\, P(x)$, que resulta na caixa de demonstração nas linhas 4–7. Note que, na linha 8, podemos mover $Q(y_0)$ fora da caixa controlada por x_0.

Enfatizamos, repetidamente, o ponto de que as variáveis novas nas regras $\exists$e e $\forall$i não podem aparecer fora de suas caixas. Eis um exemplo que mostra como as coisas podem dar errado se não tivéssemos essa condição em paralelo. Considere o argumento inválido $\exists x\; P(x)$, $\forall x(P(x) \to Q(x)) \vdash \forall y\; Q(y)$. (Compare com o argumento anterior; a segunda premissa agora é muito mais fraca, só nos permitindo concluir Q para os objetos para os quais sabemos P.) Eis uma suposta 'demonstração' de sua validade:

1		$\exists x\, P(x)$	premissa
2		$\forall x\, (P(x) \to Q(x))$	premissa
3	x_0		
4	x_0	$P(x_0)$	hipótese
5		$P(x_0) \to Q(x_0)$	$\forall x$ e 2
6		$Q(x_0)$	$\to$e 5, 4
7		$Q(x_0)$	$\exists x$ e 1, 4–6
8		$\forall y\, Q(y)$	$\forall y$ i 3–7

O último passo introduzindo $\forall y$ *não* é o errado; esse passo está correto. O passo errado é o penúltimo, concluindo $Q(x_0)$ por $\exists x$ e e violando a condição em paralelo de que x_0 não pode deixar o escopo de sua caixa. Você pode tentar 'demonstrar' esse argumento de outras maneiras, mas nenhum deles vai funcionar (supondo que nosso sistema de demonstrações está correto em relação à vinculação semântica, que definiremos na próxima seção). Sem essa condição em paralelo, seríamos também capazes de demonstrar que 'todo x satisfaz a propriedade P assim que um deles satisfaz a propriedade', um desastre semântico de proporções bíblicas!

2.3.2 Equivalências envolvendo quantificadores

Já falamos algo sobre equivalências entre certas formas de quantificação. Agora queremos fornecer demonstrações formais de algumas das equivalências envolvendo quantificadores mais usadas. Algumas envolvem diversos quantificadores em mais de uma variável. Assim, este tópico também é uma boa prática para se usar as regras de demonstração para os quantificadores umas dentro das outras.

Por exemplo, a fórmula $\forall x\ \forall y\ \phi$ deve ser equivalente a $\forall y\ \forall x\ \phi$, já que ambas dizem que ϕ deve ser verdadeira para todos os valores de x e de y. E $(\forall x\ \phi) \wedge (\forall x\ \psi)$ *versus* $\forall x(\phi \wedge \psi)$? Pensando um pouquinho, vemos que elas também devem ter o mesmo significado. Mas e se o segundo fator não começa com $\forall x$? Ou seja, se estivermos considerando $(\forall x\ \phi) \wedge \psi$ em geral e quisermos comparar com $\forall x(\phi \wedge \psi)$? Aqui é preciso ter mais cuidado, pois x pode ser livre em ψ e ficaria preso na fórmula $\forall x(\phi \wedge \psi)$.

Exemplo 2.12 Podemos codificar 'nem todas as aves podem voar' como $\neg\forall x(A(x) \to \mathrm{V}(x))$ ou como $\exists x(A(x) \wedge \neg V(x))$. A primeira fórmula está mais próxima da sentença em português, mas a última é logicamente equivalente à primeira. Equivalências envolvendo quantificadores nos ajudam a estabelecer quais codificações que 'parecem' diferentes estão, de fato, dizendo a mesma coisa.

Eis algumas equivalências envolvendo quantificadores com as quais você deve se familiarizar. Como no Capítulo 1, escreveremos $\phi_1 \dashv\vdash \phi_2$ como uma abreviatura da validade de $\phi_1 \vdash \phi_2$ e $\phi_2 \vdash \phi_1$.

Teorema 2.13 Sejam ϕ e ψ fórmulas da lógica de predicados. Então, temos as seguintes equivalências:

1. (a) $\neg\forall x\,\phi \dashv\vdash \exists x\,\neg\phi$
   (b) $\neg\exists x\,\phi \dashv\vdash \forall x\,\neg\phi$.
2. Supondo que x não é livre em ψ:
   (a) $\forall x\,\phi \wedge \psi \dashv\vdash \forall x\,(\phi \wedge \psi)$[3]
   (b) $\forall x\,\phi \vee \psi \dashv\vdash \forall x\,(\phi \vee \psi)$
   (c) $\exists x\,\phi \wedge \psi \dashv\vdash \exists x\,(\phi \wedge \psi)$
   (d) $\exists x\,\phi \vee \psi \dashv\vdash \exists x\,(\phi \vee \psi)$
   (e) $\forall x\,(\psi \to \phi) \dashv\vdash \psi \to \forall x\,\phi$
   (f) $\exists x\,(\phi \to \psi) \dashv\vdash \forall x\,\phi \to \psi$
   (g) $\forall x\,(\phi \to \psi) \dashv\vdash \exists x\,\phi \to \psi$
   (h) $\exists x\,(\psi \to \phi) \dashv\vdash \psi \to \exists x\,\phi$.
3. (a) $\forall x\,\phi \wedge \forall x\,\psi \dashv\vdash \forall x\,(\phi \wedge \psi)$
   (b) $\exists x\,\phi \vee \exists x\,\psi \dashv\vdash \exists x\,(\phi \vee \psi)$.
4. (a) $\forall x\,\forall y\,\phi \dashv\vdash \forall y\,\forall x\,\phi$
   (b) $\exists x\,\exists y\,\phi \dashv\vdash \exists y\,\exists x\,\phi$.

[3] Lembre-se de que, de acordo com as prioridades estabelecidas, $\forall x\ \phi \wedge \psi$ corresponde a $(\forall x\ \phi) \wedge \psi$.

DEMONSTRAÇÃO: Vamos demonstrar a maioria desses argumentos; as demonstrações dos que faltam são adaptações diretas, e ficam como exercício. Lembre-se de que denotamos qualquer contradição por $\perp$.

1. (a) Vamos chegar à proposição desejada demonstrando primeiro a validade de dois argumentos mais simples: $\neg(p_1 \wedge p_2) \vdash \neg p_1 \vee \neg p_2$ e depois $\neg\forall x\, P(x) \vdash \exists x \neg P(x)$. A razão para provar o primeiro é ilustrar a relação estreita que existe entre $\wedge$ e $\vee$, por um lado, e entre $\forall$ e $\exists$, por outro — imagine um modelo com apenas dois elementos 1 e 2 e tal que p_i $(i = 1, 2)$ representa $P(x)$ avaliado em i. A idéia é que a demonstração desse argumento da lógica proposicional deve nos inspirar para demonstrar o argumento da lógica de predicados. A razão para demonstrar este último argumento é que ele é um caso particular (no qual ϕ é igual a $P(x)$) daquele que realmente queremos demonstrar, de modo que, novamente, deve ser mais fácil e, ao mesmo tempo, fornecer alguma inspiração. Então vamos lá.

1	$\neg(p_1 \wedge p_2)$			premissa
2	$\neg(\neg p_1 \vee \neg p_2)$			hipótese
3	$\neg p_1$	hipótese	$\neg p_2$	hipótese
4	$\neg p_1 \vee \neg p_2$	$\vee\mathrm{i}_1$ 3	$\neg p_1 \vee \neg p_2$	$\vee\mathrm{i}_2$ 3
5	$\perp$	$\neg$e 4, 2	$\perp$	$\neg$e 4, 2
6	p_1	PBC 3–5	p_2	PBC 3–5
7	$p_1 \wedge p_2$			$\wedge$i 6, 6
8	$\perp$			$\neg$e 7, 1
9	$\neg p_1 \vee \neg p_2$			PBC 2–8

Você já viu esse tipo de demonstração antes, no Capítulo 1. É um exemplo de algo que precisa de uma demonstração por absurdo, ou $\neg\neg$e, ou LTE (o que significa que simplesmente não pode ser demonstrado no sistema de dedução natural restrito que descarta essas três regras) — de fato, essa demonstração usa três vezes a regra DPA.

Vamos demonstrar agora a validade de $\neg\forall x\, P(x) \vdash \exists x \neg P(x)$ de maneira análoga, exceto que, onde foram usadas as regras para $\wedge$ e $\vee$, agora serão usadas as regras para $\forall$ e $\exists$:

1		$\neg\forall x\, P(x)$	premissa
2		$\neg\exists x\, \neg P(x)$	hipótese
3	x_0		
4		$\neg P(x_0)$	hipótese
5		$\exists x \neg P(x)$	$\exists x$ i 4
6		$\perp$	$\neg$e 5, 2
7		$P(x_0)$	PBC 4–6
8		$\forall x\, P(x)$	$\forall x$ i 3–7
9		$\perp$	$\neg$e 8, 1
10		$\exists x\, \neg P(x)$	PBC 2–9

Você realmente se beneficiaria gastando um tempo para compreender de que modo essa demonstração imita a anterior. Essa compreensão é muito útil para se construir demonstrações na lógica de predicados: você primeiro constrói uma demonstração semelhante na lógica proposicional e depois a imita.

A seguir, vamos demonstrar que $\neg\forall x\,\phi \vdash \exists x \neg\phi$ é válida:

1	$\neg\forall x\,\phi$	premissa
2	$\neg\exists x\,\neg\phi$	hipótese
3	x_0	
4	$\neg\phi[x_0/x]$	hipótese
5	$\exists x\neg\phi$	$\exists x$ i 4
6	$\bot$	$\neg$e 5, 2
7	$\phi[x_0/x]$	PBC 4–6
8	$\forall x\,\phi$	$\forall x$ i 3–7
9	$\bot$	$\neg$e 8, 1
10	$\exists x\,\neg\phi$	PBC 2–9

A demonstração da validade da recíproca $\exists x\neg\phi \vdash \neg\forall x\,\phi$ é mais direta, pois não envolve demonstração por absurdo, $\neg\neg$e ou LTE. Ao contrário de sua recíproca, esse argumento tem uma demonstração construtiva aceita pelos intuicionistas. Poderíamos, novamente, demonstrar o argumento proposicional correspondente, mas deixamos isso como exercício.

1	$\exists x\,\neg\phi$	premissa
2	$\forall x\,\phi$	hipótese
3	x_0	
4	$\neg\phi[x_0/x]$	hipótese
5	$\phi[x_0/x]$	$\forall x$ e 2
6	$\bot$	$\neg$e 5, 4
7	$\bot$	$\exists x$ e 1, 3–6
8	$\neg\forall x\,\phi$	$\neg$i 2–7

2. (a) A validade de $\forall x\,\phi \wedge \psi \vdash \forall x(\phi \wedge \psi)$ pode ser demonstrada da seguinte maneira:

1	$(\forall x\,\phi) \wedge \psi$	premissa
2	$\forall x\,\phi$	$\wedge e_1$ 1
3	ψ	$\wedge e_2$ 1
4	x_0	
5	$\phi[x_0/x]$	$\forall x$ e 2
6	$\phi[x_0/x] \wedge \psi$	$\wedge$i 5, 3
7	$(\phi \wedge \psi)[x_0/x]$	idêntico a 6, já que x não é uma variável livre em ψ
8	$\forall x\,(\phi \wedge \psi)$	$\forall x$ i 4–7

A demonstração da recíproca pode ser assim:

1		$\forall x\,(\phi \wedge \psi)$	premissa
2	x_0		
3		$(\phi \wedge \psi)[x_0/x]$	$\forall x$ e 1
4		$\phi[x_0/x] \wedge \psi$	idêntico a 3, já que x não é uma variável livre em ψ
5		ψ	$\wedge e_2$ 3
6		$\phi[x_0/x]$	$\wedge e_1$ 3
7		$\forall x\,\phi$	$\forall x$ i 2–6
8		$(\forall x\,\phi) \wedge \psi$	$\wedge$i 7, 5

Note que a utilização de $\wedge$i na última linha é permitida, já que ψ foi obtida por um caso particular arbitrário da fórmula na linha 1, embora uma ferramenta formal de suporte para demonstrações possa reclamar de tal prática.

3. (b) A validade do argumento $(\exists x\;\phi) \vee (\exists x\;\psi) \vdash \exists x(\phi \vee \psi)$ é demonstrada usando-se a regra $\vee$e, de modo que temos dois casos principais, cada um dos quais precisa da regra $\exists x$ i:

1		$(\exists x\,\phi) \vee (\exists x\,\psi)$			premissa
2		$\exists x\,\phi$		$\exists x\,\psi$	hipótese
3	x_0	$\phi[x_0/x]$	x_0	$\psi[x_0/x]$	hipótese
4		$\phi[x_0/x]\vee\psi[x_0/x]$		$\phi[x_0/x]\vee\psi[x_0/x]$	$\vee$i 3
5		$(\phi \vee \psi)[x_0/x]$		$(\phi \vee \psi)[x_0/x]$	idêntico
6		$\exists x\,(\phi \vee \psi)$		$\exists x\,(\phi \vee \psi)$	$\exists x$ i 5
7		$\exists x\,(\phi \vee \psi)$		$\exists x\,(\phi \vee \psi)$	$\exists x$ e 2, 3–6
8		$\exists x\,(\phi \vee \psi)$			$\vee$e 1, 2–7

A recíproca tem $\exists x(\phi \vee \psi)$ como premissa, de modo que a última regra a ser usada em sua demonstração tem que ser $\exists x$ i; para essa regra, precisamos de $\phi \vee \psi$ como hipótese temporária e precisamos concluir $(\exists x\;\phi) \vee (\exists x\;\psi)$; é claro que a hipótese $\phi \vee \psi$ precisa da análise de casos usual:

1		$\exists x\,(\phi \vee \psi)$		premissa
2	x_0	$(\phi \vee \psi)[x_0/x]$		hipótese
3		$\phi[x_0/x] \vee \psi[x_0/x]$		idêntico
4		$\phi[x_0/x]$	$\psi[x_0/x]$	hipótese
5		$\exists x\,\phi$	$\exists x\,\psi$	$\exists x$ i 4
6		$\exists x\,\phi \vee \exists x\,\psi$	$\exists x\,\phi \vee \exists x\,\psi$	$\vee$i 5
7		$\exists x\,\phi \vee \exists x\,\psi$		$\vee$e 3, 4–6
8		$\exists x\,\phi \vee \exists x\,\psi$		$\exists x$ e 1, 2–7

4. (b) Dada a premissa $\exists x\;\exists y\;\phi$, temos que colocar as caixas para $\exists x$ e $\exists y$ uma dentro da outra e concluir $\exists y\;\exists x\;\phi$. É claro que temos que obedecer o formato dessas regras de eliminação como a seguir:

1		$\exists x\, \exists y\, \phi$	premissa
2	x_0	$(\exists y\, \phi)[x_0/x]$	hipótese
3		$\exists y\, (\phi[x_0/x])$	idêntico, já que x, y são variáveis diferentes
4	y_0	$\phi[x_0/x][y_0/y]$	hipótese
5		$\phi[y_0/y][x_0/x]$	idêntico, já que x, y, x_0, y_0 são variáveis diferentes
6		$\exists x\, \phi[y_0/y]$	$\forall x$ i 5
7		$\exists y\, \exists x\, \phi$	$\forall y$ i 6
8		$\exists y\, \exists x\, \phi$	$\exists y$ e3, 4−7
9		$\exists y\, \exists x\, \phi$	$\exists x$ e1, 2−8

A validade da recíproca é demonstrada da mesma forma, trocando-se os papéis de x e y. □

✶ 2.4 A semântica da lógica de predicados

Tendo visto como a dedução natural da lógica proposicional pode ser estendida para a lógica de predicados, vamos considerar agora como a semântica da lógica de predicados funciona. Como no caso proposicional, a semântica deve fornecer uma caracterização separada, mas equivalente, da lógica. Por 'separada' queremos dizer que o significado dos conectivos é definido de modo diferente; na teoria de demonstração, eles foram definidos por regras de demonstração que forneceram uma explicação *operacional*. Em semântica, esperamos algo como uma tabela-verdade. Por 'equivalente' queremos dizer que devemos ser capazes de demonstrar a correção e o completamento, como fizemos para a lógica proposicional — embora uma demonstração completa da correção e do completamento da lógica de predicados esteja além do escopo deste livro.

Antes de começarmos a descrever a semântica da lógica de predicados, vamos considerar mais de perto a diferença real entre a semântica e a teoria de demonstração. Na teoria de demonstração, o objeto básico que é construído é uma demonstração. Vamos abreviar por Γ uma lista de fórmulas como $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n$. Assim, para provar que $\Gamma \vdash \psi$ é válido, precisamos encontrar uma demonstração que vá de Γ a ψ. Por outro lado, como podemos mostrar que ψ não é conseqüência de Γ? Intuitivamente, isso é mais difícil; como você pode mostrar que *não existe nenhuma demonstração* de alguma coisa? Você teria que considerar todos os 'candidatos' a demonstração e mostrar que não funcionam. Assim, a teoria de demonstração dá uma caracterização 'positiva' da lógica; ela fornece evidência convincente para afirmações como '$\Gamma \vdash \psi$ é válida', mas não é muito útil para estabelecer evidência para afirmações do tipo '$\Gamma \vdash \phi$ não é válida'.

A semântica, por outro lado, trabalha de forma oposta. Mostrar que ψ *não* é conseqüência de Γ é a parte fácil: basta encontrar um modelo onde todos os ϕ_i são verdadeiros, mas ψ não é. Mostrar que ψ é conseqüência de Γ, por outro lado, é mais difícil, em princípio. Para a lógica proposicional, você tem que mostrar que qualquer avaliação (uma atribuição de valores lógicos a todos os átomos envolvidos) que faz com que todos os ϕ_i sejam verdadeiros também torna ψ verdadeiro. Se existe um pequeno número de avaliações, isso não é tão complicado. No entanto, quando olharmos a lógica de predicados veremos que existem uma infinidade de avaliações, que chamaremos de *modelos* daqui em diante, a considerar. Assim, temos uma caracterização 'negativa' da lógica em semântica. Sabemos que é mais fácil estabelecer afirmações do tipo '$\Gamma \nvDash \psi$'(ψ não está semanticamente vinculada a Γ) do que estabelecer '$\Gamma \vDash \psi$'(ψ está vinculada semanticamente a Γ), pois no caso anterior precisamos considerar apenas um modelo, enquanto no último caso temos, potencialmente, uma infinidade a considerar.

Tudo isso mostra a importância de estudar *ambos*, teoria de demonstração *e* semântica. Por exemplo, se você está tentando mostrar que ψ não é conseqüência de Γ e encontra dificuldade,